TD 2 - Fonctions analytiques

Questions de cours.

(a) Donner la définition de fonction analytique.

(b) Énoncer et démontrer le principe des zeros isolés pour une fonction analytique.

(c) Énoncer et démontrer le principe du prolongement analytique.

(d) Donner la définition de dérivabilité au sens complexe.

(e) Quel est le lien entre fonctions dérivables au sens complexe et fonctions analytiques ?

(f) Quel est le lien entre séries entières et fonctions analytiques ?

(g) Donner la définition de l'exponentielle complexe. Montrer qu'elle définit un homomorphisme de groupes $exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$, où $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et calculer son noyau.

(h) Donner la définition d'une détermination du logarithme complexe. Est-ce qu'elles existent toujours ?

Exercice 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} =: \ell$. Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $\frac{1}{\ell}$.

Exercice 2. Soient S et T deux séries entières de rayon de convergence ρ_S et ρ_T respectivement.

(a) Montrer que $S + T$ définit une série entière de rayon de convergence $\rho_{S+T} \geq \min\{\rho_S, \rho_T\}$.

(b) Montrer que $S \cdot T$ définit une série entière de rayon de convergence $\rho_{ST} \geq \min\{\rho_S, \rho_T\}$.

(c) Montrer à travers d'exemples que les inégalités des points (a,b) peuvent être strictes.

(d) Montrer que si S et T sont convergentes, et $S(0) = 0$, alors $T \circ S$ définit une série entière convergente.

Exercice 3 (Critère de Abel)**.** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, et $d_n = b_n - b_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons que :

(i) la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;

(ii) la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |d_k|$ converge ;

(iii) la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$ converge. *(Indication : écrire* $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ *en fonction de* $(s_k)_k$ *et* $(d_k)_k$*.)*

Exercice 4. Calculer le rayon de convergence ρ de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$. Montrer que la série converge pour tout z tel que $|z| = \rho$, $z \neq \rho$.

Exercice 5. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrer que f est dérivable au sens complexe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, et calculer f'.

Exercice 6. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non-vide, et $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques. Montrer que les fonctions suivantes sont analytiques sur U :

(a) $f + g$;

(b) λf, avec $\lambda \in \mathbb{C}$;

(c) $f \cdot g$;

(d) $h \circ f$, si $h : V \to \mathbb{C}$ est une fonction analytique sur $V \supseteq f(U)$.

Notons que des points (a,b,c) on en déduit que l'ensemble de fonctions analytiques sur U forme une algèbre sur $\mathbb{C}$.

Exercice 7. Pour les fonctions complexes suivantes, déterminer le lieu où elles sont dérivables au sens complexe :

(a) $f(z) = \bar{z}$; (b) $f(z) = |z|^2$; (c) $f(z) = \mathrm{Im}(z)^2$; (d) $f(z) = \cos(\bar{z})$.

Exercice 8. L'exponentielle complexe est définie par la série entière $e^z = \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer les assertions suivantes.

(a) Le rayon de convergence de la série $\exp(z)$ est $+\infty$. En déduire que exp est définie en tout $\mathbb{C}$.

(b) On a $e^{z+w} = e^z e^w$ pour tout $z, w \in \mathbb{C}$.

(c) La fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective.

(d) La fonction exp est dérivable au sens complexe, et satisfait $\exp' = \exp$.

(e) La restriction de exp à $\mathbb{R}$ est une fonction réelle strictement croissante et positive qui vérifie

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$$

(f) Il existe un nombre réel positif, noté π, tel que $\exp(\mathrm{i}\pi/2) = \mathrm{i}$ et tel que $e^z = 1$ si et seulement si $z \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$.

(g) La fonction exp est périodique de période $2\pi\mathrm{i}$.

(h) L'application $t \to e^{\mathrm{i}t}$ envoie l'axe réel sur le cercle unité.

Exercice 9. On considère pour tout $z \in \mathbb{C}$ les fonctions

$$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

(a) Montrer que cos et sin sont des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$.

(b) Verifier que $e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$ et $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(c) Montrer que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

Exercice 10. Montrer que la formule $f(z) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{z^n - 1}{z^n + 1}$ définit une fonction sur le complémentaire du cercle unité dans $\mathbb{C}$. Existe-t-il un prolongement continu de cette fonction à $\mathbb{C}$ tout entier ?

Exercice 11. Soit $f(z) = \sin \dfrac{\pi}{1-z}$. Montrer que f est analytique sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$. Quels sont les zéros de f sur $\mathbb{D}$? Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 12. Existe-t-il une fonction analytique f définie sur un ouvert connexe U contenant 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \in U$, on ait :

(a) $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$? (b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$?

Exercice 13. Soit $f(z)$ la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$.

(a) Montrer que $f(z)$ définie une fonction analytique sur le disque unité $\mathbb{D}$.

(b) Montrer que la fonction $g(z) = \frac{1}{1-z}$ est analytique en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

(c) En déduire que $g(z)$ est le prolongement analytique de f à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Exercice 14. Considerons la série entière $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2}$.

(a) Quel est le rayon de convergence de S ?

(b) Soit f la somme de la série S. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $zy'' + y' - 4zy = 0$ (sur le disque de convergence de S).

(c) Trouver toutes les solutions analytiques de $zy'' + y' - 4zy = 0$ définies au voisinage de 0.

Exercice 15. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe contenant 0. Supposons que $f : U \to \mathbb{C}$ soit une fonction analytique non identiquement nulle, satisfaisant la propriété :

$$\forall z, w \in U \text{ tels que } z + w \in U, \text{ alors } f(z+w) = f(z)f(w).$$

Montrer qu'il existe un nombre $b \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = e^{bz}$ pour tout $z \in U$.

Exercice 16. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

Exercice 17 (Zêta de Riemann)**.** Considerons la série $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction $z \mapsto n^z$ est analytique sur $\mathbb{C}$ et que $|n^z| = n^{\mathrm{Re}(z)}$.

(b) Montrer que la série $\zeta(z)$ converge uniformément sur les demi-plans $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 1+\varepsilon\}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(c) Montrer que la série $\zeta(z)$ converge absoluement sur les demi-plan $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$. En déduire que ζ définit une fonction continue sur H.

Exercice 18. On considère les deux séries entières

$$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad T(w) = \mathrm{i}\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{w^n}{n}.$$

(a) Calculer les rayons de convergence ρ_S et ρ_T de S et T.

On denote par $D(c,r)$ le disque ouvert de centre $c \in \mathbb{C}$ et rayon $r > 0$. Soient $f(z)$ la somme de $S(z)$ pour $z \in D(0,\rho_S)$, et $g(z)$ la somme de $T(z-2)$ pour $z \in D(2,\rho_T)$.

(b) Montrer qu'il existe un ouvert connexe U contenant $D(0,\rho_S)$ et $D(2,\rho_T)$ et une fonction analytique $h : U \to \mathbb{C}$ telle que $h \equiv f$ sur $D(0,\rho_S)$ et $h \equiv g$ sur $D(2,\rho_T)$.

Exercice 19. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0. On suppose que f est une fonction analytique sur U qui vérifie

$$f'(t) = \frac{1}{t} \text{ et } \exists\, t_0 \in U \text{ tel que } \exp(f(t_0)) = t_0.$$

Montrer que f est une détermination du logarithme.

Exercice 20. Déterminer une fonction analytique définie sur $U = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup\,]-1,+1[$ et telle que $f(0) = \mathrm{i}$ et $(f(z))^2 = z^2 - 1$ pour tout $z \in U$.

Exercice 21. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on désigne $R_\alpha = \{re^{\mathrm{i}\alpha} \mid r \geq 0\}$, et $U_\alpha = \mathbb{C} \setminus R_\alpha$. Déterminer les valeurs de

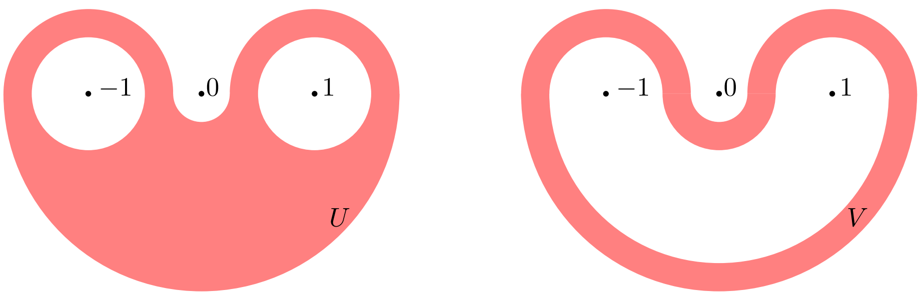
$$f(1), \quad f(\mathrm{i}), \quad f(-\mathrm{i}), \quad f(-1+\mathrm{i}), \quad f(-1-\mathrm{i}), \quad 2^{\mathrm{i}} := e^{\mathrm{i}f(2)}, \quad \mathrm{i}^{\mathrm{i}}, \quad (-\mathrm{i})^{\mathrm{i}},$$

où f désigne :

(a) la détermination principale du logarithme sur U_π ;

(b) la détermination du logarithme sur U_0 définie par $f(re^{\mathrm{i}\alpha}) = \ln r + \mathrm{i}\alpha$ pour $r > 0, \alpha \in]0, 2\pi[$.

Exercice 22. Considerer les ouverts connexes U et V en figure :



Déterminer s'ils existent des déterminations continues (analytiques) sur U et V des fonctions suivantes :

(a) $\log z$, (b) $\log(z^2-1)$, (c) $\sqrt{z^2-1}$, (d) $\sqrt[3]{z^2-1}$,

(e) $\sqrt{z(z^2-1)}$, (f) $\sqrt[3]{z(z^2-1)}$. (g) $\sqrt[3]{z(z-1)((z-1)^2-\eta^2)}$ pour $|\eta| \ll 1$